Über die Minimum-Ablenkung der Lichtstrahlen durch doppeltbrechende Prismen.

Von **Dr. Viktor v. Lang.**

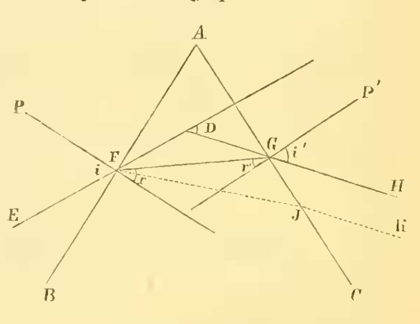
1. Die Hauptbrechungsquotienten doppelt brechender Medien werden gewöhnlich mittelst Prismen bestimmt, welche parallel einer Elasticitätsaxe geschnitten sind, so dass wenigstens die senkrecht zur brechenden Kante polarisirte Welle sich mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzt. Sénarmont [1]) hat vor nicht langer Zeit gezeigt, wie man bei also geschnittenen Prismen auch die zweite, parallel zur brechenden Kante polarisirte Welle mit variabler Geschwindigkeit zur Messung der Hauptbrechungsquotienten benützen könne. Es tritt hiebei der Umstand ein, dass die Wellennormale bei dem Durchgange der Lichtstrahlen durch das Prisma nicht mehr gleiche Winkel mit den Seiten desselben einschliesst, wie es der Fall ist wenn die Welle sich nach allen Richtungen mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzt. Indem Sénarmont die Orientirung der Prismenseiten gegen die Elasticitätsaxen als bekannt voraussetzt, entwickelt er die Gleichung, welche die Abhängigkeit der beiden Hauptbrechungsquotienten, zwischen denen die Geschwindigkeit der Welle variirt, von der Grösse der brechenden Kante und der Minimum-Ablenkung angibt. Diese Gleichung vereinfacht sich noch sehr, wenn die Halbirungslinie des brechenden Winkels mit einer Elasticitätsaxe zusammenfällt, oder wenn, was dasselbe bedeutet, die beiden Prismenflächen gleich gegen die Elasticitätsaxen orientirt sind. In diesem einzigen Falle nämlich schliesst die hindurchgehende Wellennormale gleiche Winkel mit beiden Seiten des Prisma's ein.

Dieser Satz gilt aber nicht allein für Wellen, deren Geschwindigkeit durch den Radius einer Ellipse gegeben sind, wie in dem von Sénarmont untersuchten Falle, sondern allgemein für beliebig

---

[1]) Note sur quelques formules propres à la détermination des trois indices principaux dans les cristaux biréfringentes. Nouv. Ann. de Mathém. t. XVI.

orientirte Prismen. Sobald die beiden Prismenflächen sich gleich gegen die Elasticitätsaxen verhalten oder, anders ausgedrückt, sobald die Halbirungslinie des brechenden Winkels in einen optischen Hauptschnitt entfällt, so geht bei der Minimum-Ablenkung die Welle gleichgeneigt gegen beide Seiten des Prisma's hindurch. Mit Vortheil wird man sich daher eines Prisma's bedienen, das z. B. von zwei Flächen einer rhombischen Pyramide gebildet wird. Beide Wellen gehen alsdann bei ihrer Minimum-Ablenkung längs eines optischen Hauptschnittes durch den Krystall und wenigstens eine Welle wird schon unmittelbar einen Hauptbrechungsquotienten liefern.



Bevor ich es aber versuche, den Beweis hiefür zu geben, werde ich noch einige Worte über die Bestimmung der Hauptbrechungsquotienten mittelst zweier beliebig orientirter Krystallflächen (oder überhaupt mittelst Flächen, deren Neigungen gegen die Krystallaxen bekannt sind) voranschicken.

2. Es bezeichne

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$	die Grössen der drei Elasticitätsaxen;
α, β, γ	die drei Hauptbrechungsquotienten;
P	die Normale auf die erste Prismenfläche;
P'	die Normale auf die zweite Fläche;
ξ, η, ζ	die Winkel, welche P mit den drei Elasticitätsaxen einschliesst;
ξ', η', ζ'	die entsprechenden Winkel in Bezug auf P;
A	die Grösse der brechenden Kante;
i	den Winkel des einfallenden Lichtstrahles, welcher rechtwinklig zur brechenden Kante vorausgesetzt wird, mit der Normale P;
i'	den Winkel des austretenden Strahles mit P';
r, r'	die Winkel, welche die Wellennormale im Prisma mit P und P' einschliesst;
V	die Geschwindigkeit in der Luft;
$\mathfrak{p}$	die Geschwindigkeit der Welle im Krystalle;

μ, ν, π die Winkel der Wellennormale im Krystalle mit den Elasticitätsaxen;

$n = \frac{V}{v}$ der Brechungsquotienten für die durch μ, ν, π gegebene Richtung;

D die Gesammtablenkung des Lichtstrahles.

Mittelst sphärischer Trigonometrie findet man leicht folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\mu &= [\cos\xi \sin(A-r) - \cos\xi' \sin r]\frac{1}{\sin A}\\
&= [\cos\xi \sin i' - \cos\xi' \sin i]\frac{1}{n\sin A}\\
\cos\nu &= [\cos\eta \sin(A-r) - \cos\eta' \sin r]\frac{1}{\sin A}\\
&= [\cos\eta \sin i' - \cos\eta' \sin i]\frac{1}{n\sin A}\\
\cos\pi &= [\cos\zeta \sin(A-r) - \cos\zeta' \sin r]\frac{1}{\sin A}\\
&= [\cos\zeta \sin i' - \cos\zeta' \sin i]\frac{1}{n\sin A}
\end{aligned}\right\} \quad 1)$$

3. Die Normale der einfallenden Welle EF, welche in der Luft mit der Richtung des Strahles zusammenfällt, verbleibt bei jeder Brechung in der Einfallsebene, es wird daher auch die austretende Wellennormale GH rechtwinklig zur brechenden Kante sein. Die Richtung des Strahles hingegen wird beim Eintritte in den Krystall im Allgemeinen aus der Einfallsebene heraustreten, JF; an der zweiten Prismenfläche aber angelangt wird der Strahl, da er in die Luft austritt, wieder seiner Wellennormale parallel, JK. Wir können mit unseren Instrumenten natürlich nur den Ablenkungswinkel des Strahles (EF zu JK) messen, nach dem eben Gesagten ist aber dieser gleich dem Ablenkungswinkel der Wellennormale (EF zu GH); nur kann hiebei geschehen, dass das Bild der Licht gebenden Spalte nach oben oder unten parallel der brechenden Kante verschoben ist. Diese Verschiebung für die Kante selbst gleich Null, wächst mit der Dicke der durchlaufenen Schicht und ist jedenfalls von geringem Betrage; wäre sie bedeutender, so könnte man durch paralleles Verschieben des Limbus sich helfen.

4. In Bezug auf die Wellennormale hat man nun

$$2)\quad \begin{cases} A = r + r' \\ D = i + i' - r - r' = i + i' - A \\ \dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{\sin i'}{\sin r'} = n \end{cases}$$

Hieraus findet man, falls die Winkel A, D, i bekannt sind, den Werth von n aus folgenden Formeln:

$$3)\quad \begin{cases} \tan\left(\dfrac{A}{2} - r\right) = \tan\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{A+D}{2}\tan\left(i - \dfrac{A+D}{2}\right) \\ n = \dfrac{\sin i}{\sin r} \end{cases}$$

Die Geschwindigkeit einer Welle ist aber andererseits gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\cos \mu^2}{p^2 - \mathfrak{a}^2} + \frac{\cos \nu^2}{p^2 - \mathfrak{b}^2} + \frac{\cos \pi^2}{p^2 - \mathfrak{c}^2} = 0$$

oder die Nenner durch V dividirt

$$4)\quad \frac{\cos \mu^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\alpha^2}} + \frac{\cos \nu^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\beta^2}} + \frac{\cos \pi^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.$$

Setzt man hierin für $\cos\mu$, $\cos\nu$, $\cos\pi$ die Werthe aus Gleichung (1), so hat man

$$5)\quad \frac{(\cos\xi \sin i' - \cos\xi' \sin i)^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\alpha^2}} + \frac{(\cos\eta \sin i' - \cos\eta' \sin i)^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\beta^2}} + \frac{(\cos\zeta \sin i' - \cos\zeta' \sin i)^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\gamma^2}} = 0$$

In dieser Gleichung finden sich ausser den unbekannten Grössen α, β, γ, erstens die Grössen n, i, i', welche nach Gleichung 2 und 3 durch die Beobachtung ermittelt werden können; zweitens die Winkel der Prismenflächen mit den Elasticitätsaxen ξ, η, ζ, ξ', η', ζ'. Fallen, wie im rhombischen Systeme, die Krystallaxen mit den Elasticitätsaxen zusammen, so sind die Werthe dieser Winkel, falls die Prismenseiten von Krystallflächen gebildet werden, leicht aus den krystallo-

graphischen Constanten zu ermitteln. In der Gleichung 5 finden sich alsdann nur mehr die drei Unbekannten α, β, γ. Indem man nun die Incidenz des auffallenden Lichtstrahles zweimal ändert, so erhält man im Ganzen drei Gleichungen von der Form der Gleichung 5, aus welchen die Werthe von α, β, γ bestimmt werden können.

Im monoklinoëdrischen Systeme, wo die Lage der Elasticitätsaxen in der Symmetrieebene erst zu ermitteln ist, tritt in die Grössen ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' noch eine unbekannte Grösse (welche eben die Lage der Axen in der Symmetrieebene bestimmt) hinein und es sind daher wenigstens 4 Gleichungen nöthig.

Im triklinoëdrischen Systeme würde sich die Gesammtzahl der Unbekannten auf sechs belaufen.

Obwohl nun diese Methode der Ermittelung der Hauptbrechungsquotienten etwas längere Rechnungen erfordert, so kann sie doch, falls ein oder zwei Brechungsquotienten auf die gewöhnliche Weise bestimmt wurden, gute Dienste leisten.

5. Gehen wir nun zur Betrachtung der Minimum-Ablenkung über. Aus den Gleichungen 2 erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i'}{\sin r'} = n \\ &D = i + i - A; \; r' = A - r \\ &D = arc\,sin\,\{n \sin r\} + arc\,sin\,\{n \sin (A - r)\} - A \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

In der letzten Gleichung ist die einzige variable Grösse r, mit welcher auch der Brechungsquotient n sich ändert. Man hat also für das Minimum der Ablenkung folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{dD}{dr} = \frac{\frac{dn}{dr} \sin r + n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin r}} + \frac{\frac{dn}{dr} \sin (A - r) - n \cos (A - r)}{\sqrt{1 - n^2 \sin (A - r)^2}} = 0 \quad 7)$$

und aus dieser Gleichung bestimmt sich der specielle Werth von r, für welchen das Minimum stattfindet.

In Bezug auf die Gleichungen 6 ist es ersichtlich ganz gleichgiltig, ob man i oder i' als Einfallswinkel annimmt; dasselbe gilt in Bezug auf den aus Gleichung 7 resultirenden Werth von r. Bei dem Minimum der Ablenkung wird also die Wellen-

Normale im Krystalle immer dieselbe Richtung haben, welche Fläche man auch zur Einfallsebene macht; ersichtlich wird auch dann die Richtung in der Luft dieselbe sein.

Denken wir uns nun ein Prisma, dessen beide Seiten gleich orientirt gegen die Elasticitätsaxen sind. Die Winkel, welche die Wellennormale bei der Minimum-Ablenkung mit den beiden Flächennormalen einschliesst, seien wieder r und r'. Da aber die beiden Flächen sich gleich gegen die Elasticitätsaxen verhalten, was also für die eine Fläche Geltung hat, auch für die andere Fläche gilt, so muss in diesem Falle

$$r = r'$$

sein, d. h. die Wellennormale ist gleich geneigt gegen beide Prismenseiten.

Dass dies jedoch der einzige Fall ist, in welchem $r = r'$ wird, lässt sich auf folgende Art beweisen.

6. Wir nehmen an, die Wellennormale schliesse bei dem Minimum ihrer Ablenkung gleiche Winkel mit den Prismenseiten ein, und suchen nun die Bedingungen, welche $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ erfüllen müssen, dass obige Annahme wirklich stattfindet.

Wir setzen also

$$r = r' = \frac{A}{2}.$$

Dieser Werth in die Gleichung 7 gesetzt, gibt nun die gesuchte Bedingungsgleichung. Da der Werth von $\frac{dn}{dr}$ noch nicht näher bekannt ist, so können wir die Substitution in diesem Ausdrucke vorläufig nur anzeigen. Man erhält auf diese Weise nach einfacher Reduction:

$$\left(\frac{dn}{dr}\right)_{\mu = \frac{A}{2}} \cdot sin \frac{A}{2} = 0$$

und da $sin \frac{A}{2}$ nicht gleich Null sein kann

$$\left(\frac{dn}{dr}\right)_{r = \frac{A}{2}} = 0 \qquad 8)$$

Um den Werth von $\frac{dn}{dr}$ zu finden, differentiiren wir die Gleichung 4 nach r. Man erhält, da die Winkel μ, ν, π ebenfalls mit r variiren, folgende Gleichung

$$\frac{dn}{dr} = - \frac{\frac{\frac{d\cos\mu^2}{dr}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\alpha^2}} + \frac{\frac{d\cos\nu^2}{dr}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\beta^2}} + \frac{\frac{d\cos\pi^2}{dr}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\gamma^2}}}{\frac{2}{n}\left\{\frac{\cos\mu^2}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)^2} + \frac{\cos\nu^2}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)^2} + \frac{\cos\pi^2}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2}\right\}} \qquad 9)$$

Dieser Ausdruck soll nach Gleichung 8 gleich Null sein; da der Nenner als eine Summe lauter positiver Grössen nicht gleich Null sein kann, so hat man

$$\left\{\frac{\frac{d\cos\mu^2}{dr}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\alpha^2}} + \frac{\frac{d\cos\nu^2}{dr}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\beta^2}} + \frac{\frac{d\cos\pi^2}{dr}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\gamma^2}}\right\}_{r=\frac{A}{2}} = 0.$$

Die Zähler in dieser Gleichung hängen von den Grössen ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' und $r = \frac{A}{2}$ ab; sie können daher für Prismen aus verschiedenen Krystallen gleich bleiben, während die Nenner auf die mannigfaltigste Weise variiren. Soll aber trotzdem die Summe dieser Brüche gleich Null sein, so kann dies nur geschehen, wenn jeder einzelne Bruch gleich Null ist. Anstatt der letzten Gleichung hat man also folgende drei neue Gleichungen:

$$\left(\frac{d\cos\mu^2}{dr}\right)_{r=\frac{A}{2}} = 0\,; \quad \left(\frac{d\cos\nu^2}{dr}\right)_{r=\frac{A}{2}} = 0\,; \quad \left(\frac{d\cos\pi^2}{dr}\right)_{r=\frac{A}{2}} = 0. \qquad 10)$$

Setzt man hierin für *cos* μ, *cos* ν, *cos* π die Werthe aus Gleichung 1, so hat man

$$\left(\frac{d\cos\mu^2}{dr}\right)_{r=\frac{A}{2}} =$$

$$-\left\{\frac{2[\cos\xi\sin(A-r) - \cos\xi'\sin r]\,[\cos\xi\cos(A-r) + \cos\xi'\cos r]}{\sin A}\right\}_{r=\frac{A}{2}} = 0$$

und hierin die Substitution $r = \frac{A}{2}$ ausgeführt, gibt

$$11)\qquad -2\,[\cos\xi + \cos\xi']\,[\cos\xi - \cos\xi']\,\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin A} = 0$$

$$[\cos\xi + \cos\xi']\,[\cos\xi - \cos\xi'] = 0.$$

Damit diese Gleichung erfüllt sei, muss

$\cos\xi = \pm\cos\xi'$ sein; auf gleiche Weise

erhält man $\cos\eta = \pm\cos\eta'$ und

$\cos\zeta = \pm\cos\zeta'$.

Diesen Gleichungen entsprechen die Werthe

$$12)\qquad \xi = \pm\begin{cases}\xi' \\ 180^\circ - \xi'\end{cases} \qquad \eta = \pm\begin{cases}\eta' \\ 180^\circ - \eta'\end{cases} \qquad \zeta = \pm\begin{cases}\zeta' \\ 180^\circ - \zeta'.\end{cases}$$

Diese Gleichungen müssen also erfüllt sein, soll bei dem Minimum der Ablenkung die Wellennormale gleichgeneigt gegen beide Prismenflächen hindurchgehen. Sie bedeuten, dass die beiden Prismenseiten gleich orientirt sein müssen gegen die Elasticitätsaxen. In diesem Falle entfällt die Halbirungslinie des brechenden Winkels in einen der optischen Hauptschnitte.